INDUCCION MATEMÁTICA

1. INTRODUCCION:

En el lenguaje cotidiano, la palabra INDUCCION tiene un significado de generalización a partir de hechos particulares. En efecto, la habilidad de formular hipótesis generales a partir de unas suposiciones iniciales limitadas es una de las principales características de la creatividad de que se debe verificar su autencidad. Para ello, existe un método de razonamiento deductivo denominado INDUCCIÓN MATEMATICAS, calificado como un procedimiento eficaz.

Utilicemos un ejemplo para visualizar el proceso inductivo supongamos como hipótesis: "la suma de los enteros impares consecutivos se puede expresar de la siguiente manera:

$$1 : 1$$

$$1 + 3 : 4$$

$$1 + 3 + 5 : 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 : 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 : 25$$

Se puede generalizar el resultado siguiente. En efecto, cada resultado es el cuadrado del número de términos que se sumaron. Podemos lanzar la siguiente conjetura inductiva "la suma de los primeros números impares es n^2 para todo entero positivo n.

Simbólicamente podemos escribir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Esta hipótesis debe ser comprobar su validez para todos los enteros positivos. El método de demostración más eficaz es el principio de inducción matemática.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMATICA

INTRODUCCION:

1. **CONJUNTOS INDUCTIVOS**

Un conjunto S de números es un conjunto inductivo si y solo sí cumple las siguientes condiciones:

1) $1 \in S$

$$2) \quad 1 \in s \Rightarrow a + 1 \in s$$

Ejemplos:

1) El conjunto de los números enteros positivos es un conjunto inductivo.

2) El conjunto de los reales positivos es un conjunto inductivo.

2. LOS POSTULADOS DE PEANO

El matemático Italiano GUISEPPE PEANO (1858-1932) en su "proyecto formulario" que es una enciclopedia de matemáticas que contenía fórmulas y teoremas, enuncia los valiosos aportes a la teoría de conjuntos y sus famosos postulados que llevan su apellido. Veamos:

P_1 : Existe un elemento $1 \in N$

P_2: Para todo a $a \in N$, existe su sucesor $a + 1 \in N$

P_3: Para todo $a \in N$, su sucesor es distinto de 1, es decir, que uno no es sucesor ningún positivo.

P_4 :Dados $a, b \in N$, con el mismo sucesor entonces, los dos números son iguales; es decir, si $a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b$

P_5 :Si K es una clase, $1 \in k$ y si para $x \in N : x \in K$ implica

$$x+1\in K$$

El quinto postulado de PEANO se le conoce con el nombre de principio de inducción matemática

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMATICA

Supongamos un conjunto de enteros $A=\{n/n\geq a\}$ y una proposición de la forma: para todo $n\ \ de\ \ A,\ P_n.$

Podemos comprobar la validez de la proposición $P_{n,}$ utilizando el principio de inducción matemática que consta de 3 pasos:

1. Se comprueba que P_n se cumple para el primer valor de verdad,es decir, n =1
2. Se supone que P_n se cumple para un valor de $n=k,$ tal que k=1 y $k\in 1.$ Este paso se toma como una hipótesis denominada HIPOTESIS INDUCTIVA.

3. Se demuestra que cumple para $n=k+1.$ Este paso se toma como tesis del teorema y se denomina TESIS INDUCTIVA.

En conclusión: La inducción matemática consiste en demostrar que si P_k es verdadera, entonces también es verdadera P_k+1 también es verdadera.

Ejemplos

1. Para $n \geq 1$

$$1+3+5+7+....+(2n-1)= n^2$$

Solución

Sea: $P_n : 1+3+5+7+....+(2_n-1)=n^2$

$$A=\{n \in N / P_n \quad es \quad verdadera\}$$

1. P_1: Es verdadero, puesto que $(1)^2=1 \; y \; 1 \in A$
2. Se supone que se cumple para $n=k^2$

Debemos comprobar que se cumple para $n=k+1$

$$P_k+1: \; 1+3+5++...+k+2k-(2k-1)+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

3. Se parte de $P_k + (2k+1) = P_k+1$

$$K^2 + (2k+1)= K^2+2k+1$$

Así, $K \in A \Rightarrow k+1 \in A \;\; y \;\; A$ es conjunto inductivo

2. Para $n \geq 1, \;\; demostrar:$

$$1 \; + \; 2+3+...+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Solución:

Tenemos $P_n: \;\; 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$

$$A: \quad \{n \in N \,/\, P_n \;\; es \;\; verdadero\}$$

Parte 1: Demostrar que $1 \in A$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$=1$$

$$\therefore 1 \in A$$

Parte 2: Demostrar que S es inductivo

$$P_k: \quad 1+2+3+\ldots k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

Demostrar que A es inductivo

Se parte $P_k + k + 1 \quad = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$P_k + 1: \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\,(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por lo tanto, k es $\longrightarrow k+1 \in \$$, y S es inductivo

3. Para $n \geq 1$, demostrar $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n\,(3n-1)}{2}$

Solución

Tenemos: $P_n : 1+4+7+\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

$$A: \quad \{n\in N / P_n \quad es \;\; verdadero\}$$

<u>Parte 1</u>: Demostrar que $1 \in \; S$

$$1 \;=\; 1\;\left(\frac{3.1-1}{2}\right)$$

$$=\;\frac{2}{2}$$

$$=\;1$$

$$1\in S$$

<u>Parte 2</u>: Demostrar que S es un inductivo, es decir, que se cumple para $k+1$

$$P_k: \quad 1^2+2^2+\ldots k^2=\frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}$$

Altura para

$$P_k+1: \;\; 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}$$

$$= \frac{(K+1)\left[2^2K^2+7(2)K+12\right]}{2\times 6}$$

$$= \frac{(K+1)(2K+4)(2K+3)}{2\times 6}$$

$$= 2\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{2\times 6}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

Por lo tanto, $k \in A, \Rightarrow k+1 \in A,\ y\ A\ es\ \ inductivo$

5. Para todo $n \geq 1,$ demostrar $3^{2n} - 1$ es divisible por 8

Solución

Tenemos: $P_n :\ 3^{2n} - 1$ es divisible por 8

$$S : \{ n \in N / P_n \quad es \quad verdadero \}$$

<u>Parte 1</u> Demostrar que se cumple n= 1

$$3^{2-1} - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

<u>Parte 2</u> Demostrar que S es inductivo, es decir, que se cumple para k y para k+1

$P_k :\quad 3^{2k} - 1 = 8r$ Para algún entero $r \Rightarrow$

Altura: $3^{2k} = 1 + 8r$

$$P_{k+1} \quad 3^{2(k+1)} = 3^{2k+2} = 3^{2k-2} = 3^{2k} . 3^2$$

$$= 9\left[3^{2k}\right]$$

$$= 9\,[1+8r]$$

$$= 9 + 9\,(8r)$$

$$= 1 + [8 + 9(8r)]$$

$= 1 + 8[1+9r]$, entonces

$$3^{2k+2} - 1 \qquad = 8[1+9r]$$

6. Demostrar que $4^{2n} - 1$es divisible por 5

Demostración:

Tenemos: P_n = $4^{2n} - 1$ es divisible por 5

A = $\{N \in n / p_n \ \ es \ \ verdadero\}$

<u>Parte 1</u> Demostrar que se cumple para $n = 1$

$4^{2.1} - 1 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 \; y \, 15$ es divisible por 5

Parte 2 Demostrar que S es inductivo

P_k : $4^{2k} - 1 = 5r$ Para algún entero r

$$4^{2K} = 1 + 5r$$

P_{k+1} : $4^{2(k+1)} = 1 + 5r$

$$4^{2K+2} = 4^{2K}.4^2$$

$$= 16\left[4^{2k}\right]$$

$$= 16\ [1 + 5r]$$

$$= 16 + 16\,(5r)$$

$$= 1 + 15 + 16\,(5r)$$

$= 1 + 5\,[3 + 16r]$, entonces,

$$4^{2k+2} - 1 = 5\,[3 + 16r]$$

Por lo tanto, $k \in A \Rightarrow k+1 \in A,$ y A es inductivo.

7. Demostrar que $(x\ y)^n = x^n . y^n$

Demostración

Tenemos: $P_n = (x\ y)^n = x^n y^n$

$$A = \{n \in N \,/\, P_n \quad es \;\; verdadero\}$$

<u>Parte 1</u> Demostrar que se cumple para $n = 1$

$$(x\ y)^1 = x\ y$$

$$= x^1\ y^1$$

$$1 \in s$$

<u>Parte 2</u> Demostrar que S es inductivo

$$P_k : \quad (x\ y)^k = x^k\ y^k$$

$$P_{k+1}: \quad (x\,y)^{k+1} = \ x^{k+1} \quad y^{k+1}$$

$$Si \quad (x\,y)^{k+1} = (x\,y)^{k}(x\,y)$$

$$= x^{y}.y^{k}.x\,y$$

$$= \left(x \ .\ x^{k}\right)\left(y\ .\ y^{k}\right)$$

$$= x^{k+1} \quad .\ y \quad ^{k+1}$$

Por lo tanto, $k \in A \Rightarrow k+1 \in A,\ y\ A\, es\ inductivo$

8. Demostrar la fórmula del binomio

$$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k}, \quad con \quad n \geq 1$$

Demostración

$$P_{n}: \ (a+b)^{n} = \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^{j}$$

$$A: \ \{n \in \mathrm{N} / P_{n} \ \ es \ \ verdadero\}$$

Parte 1: Demostrar que se cumple $n = 1$

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j}\, b^{j} = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b = (a+b)^{1}$$

$\therefore\ 1 \in s$

Parte 2: Demostrar que S es inductivo

$$p_k: \quad (a+b)^{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j}\, b^{j}$$

$$P_{k+1}: \quad (a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1}\, b^{j}$$

Se parte de $P_{k,}$ se multiplica ambos miembros por $(a+b)$ y se trata de obtener P_{k+1}

Sea:

$$(a+b)^k.(a+b)= \left[\sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\, b^j\right](a+b)$$

$$=\left[\binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k+1}\, b + \binom{k}{2} a^{k-2}\, b^2 + \ldots + \binom{k}{k} b^j\right](a+b)$$

$$=\left[\binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k\, b + \binom{k}{2} a^{k-1}\, b^2 + \ldots \binom{k}{k} a\, b^k\right] +$$

$$\left[\binom{k}{0} a^k\, b + \binom{k}{1} a^{k-1}\, b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} a\, b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}\right]$$

$$=\binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] a^k\, b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] a^{k-1}\, b^2$$

$$+\cdots+\left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] a\, b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

Recordar que:

$$\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=\binom{k+1}{r};\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$$

$$\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

Por lo tanto

$$(a+b)^k+(a+b)=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^k b+\binom{k+1}{2}a^{k+1}b^2+\ldots+$$

$$\binom{k+1}{k}a\,b^k+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1}b^j$$

9. Demostrar por inducción matemática el teorema de MOIVRE

$$[r\,(\cos\theta+i\ sen\ \theta)]^n=r^n(Cos\ n\ \theta+iSen\ n\ \theta)$$

D// Tenemos: $P_n=\left[r(Cos\theta+i\ Sen\theta)=r^n(Cos\ n\theta+i\ Sen\ k\ \theta)\right]$

$$A = \{n \in \mathrm{N} / Pn \ \ es \ \ verdadero\}$$

1) Se cumple para $n = 1$, en efecto

$$[r(Cos\theta + i\ Sen)]^1 = r\ Cos\theta + i\ Sen\ \theta$$

2) Se supone que se cumple para $n = k$

$$P_k : \ [r(Cos\theta + i\ Sen\theta)]^k = r^k(Cosk\theta + i\ Senk\theta)$$

3) Debe comprobar que se cumple para $n = k + 1$

$$P_{k+1} :$$
$$[r(Cos\theta + i\ Sen\theta)]^{k+1} = Y^{k+1}[Cos(k+1)\theta + i\ Sen(\kappa + 1)\theta]$$

Ahora

$$P_k + 1: \ \ P_k.[r(Cos\theta + i\ Sen\theta)]$$

$$= r^k[Cosk\ \theta\ i\ Senk\theta].[r(Cos\theta + i\ Sen\theta)]$$

$$= r^{k+1}[Cos(k+1)\ \theta + i\ Sen\ (k+1)\theta]$$

10. Demostrar

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

S// Sea: $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$A = \{n \in \mathrm{N} \,/\, P_n \ \ es \ \ verdadera\}$$

1. P_1 es verdadero, puesto que $1^3 = \dfrac{(1)^2(1+1)^2}{4}$

$$1 = \frac{(1)(2)^2}{4}$$

$1 = 1$, y, $1 \in A$

2. Se supone que se cumple para $n = k$

$$P_k:\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Debemos comprobar que se cumple para $n = k + 1$

$$P_k + 1: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\ (k+2)^2}{4}$$

4. Se parte

$$P_{k+1} : P_k + \ \ y\ (k+1)^3 \ = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

En efecto

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+2)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4k + 4\right]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Por lo tanto, $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$ y A es un conjunto inductivo